Beszámoló
a **MAT F 67910** számú **„Nem kommutatív Galois elmélet”** című
OTKA projekt keretében 2007. VII. 1.– 2010. XII. 31. végzett kutatásokról

## Összevetés a munkatervvel.

A fenti OTKA támogatásra 2006 áprilisában nyújtottam be pályázatot. Az akkor készített munkaterv az alábbi fő kutatási terveket tartalmazta.

(1) Nem kommutatív torsorok vizsgálata (indukált funktorok a hozzárendelt bialgebroidok komodulus kategóriái között, pre-torsor fogalma).
(2) Schneider-típusú tételek (kategória elméleti megalapozás, kiterjesztés Hopf-algebroidokra).
(3) Galois-leszármazás (hűen lapos eseten túl).
(4) Galois-megfeleltetések (hűen lapos bialgebroid Galois-kiterjesztésekre, és ezeken túl).

Mire az OTKA által támogatott projekt 2007 júliusában végül megkezdődhetett, a fenti tervek közül (1) részben, (2) pedig teljes egészében megvalósult – értelemszerűen a jelen OTKA támogatása nélkül. Ezek eredményei a

• G. Böhm and T. Brzeziński, *Pre-torsors and equivalences*, J. Algebra 317 (2007), 544-580.
• A. Ardizzoni, G. Böhm and C. Menini,
*A Schneider type theorem for Hopf algebroids*, J. Algebra 318 (2007), no. 1, 225-269.

közleményekben jelentek meg. Az (1) pont további része és a (3) ponthoz tartozó kutatások a jelen projekt keretében valósultak meg. A (4) pont egyelőre nem valósult meg. Figyelmemet elfordították izgalmasabbnak és aktuálisabbnak tűnő kérdések, mint a következő, az eredeti munkatervben nem szereplő, de ugyanazon témakörbe illeszkedő problémák.

(5) Kogyűrűk kontramodulusainak vizsgálata.
(6) A „monádok formális elméletének” kiterjesztése gyenge Hopf-algebrákkal kapcsolatos konstrukciók leírásához.
(7) Gyenge bialgebrák általánosítása nem feltétlenül fonott monoidális kategóriákra (ún. bimonádok vizsgálata).
(8) Gyenge disztributív szabályok és a kapcsolódó felhúzás probléma vizsgálata.
(9) Gyenge disztributív szabályok szerepének felderítése faktorizációs szerkezetekben.

## „Handbook of Algebra” fejezet.

A beszámolási időszak legnagyobb feladata – mind jelentőségét mind a ráfordított időt tekintve – a Hopf-algebroidokról szóló fejezet volt a „Handbook of Algebra” számára, Michiel Hazewinkel szerkesztő felkérésére. Ebben áttekintettem a Hopf-algebroidokkal kapcsolatos teljes irodalmat. Tárgyaltam a Hopf-algebroidok leírásában szerepet játszó algebrai struktúrákat (gyűrűket és kogyűrűket nem kommutatív algebrák fölött), a bialgebroidok alternatív (de ekvivalens) definícióit, ezek kategória elméleti vonatkozásait, bialgebroidok nem triviális dualitás fogalmát, példákat és különböző eljárásokat melyekkel bialgebroidok konstruálhatók, a modulusok és komodulusok elméletét és bialgebroidokkal vett Galois-kiterjesztéseket. Részletesen írtam Hopf-algebroidok integrál elméletéről, Galois-elméletük specialitásairól (a bialgebroidokhoz képest) valamint sorra vettem és összehasonlítottam az irodalomban fellelhető, a Hopf-algebrákat nem kommutatív bázis algebrákra különbözőképpen általánosító fogalmakat.
(**Referencia:** G. Böhm, *Hopf Algebroids*, Handbook of Algebra Vol 6, edited by M. Hazewinkel, Elsevier, 2009, pp. 173-236.)

**Nem kommutatív torsorok vizsgálata.**

C. Grunspan illetve P. Schauenburg munkája nyomán ismert, hogy az alapgyűrű bármely hűen lapos (angol szóval faithfully flat) Hopf–Galois-kiterjesztése meghatároz egy második Hopf-algebrát, melyre nézve a kiterjesztés szintén Galois-tulajdonságú. Továbbá a (geometriai szempontból szimmetrikus szerepet betöltő) két Hopf-algebra komodulus kategóriái ekvivalensek. Korábbi, T. Brzezińskivel közös munkámban bialgebroidok (sőt kogyűrűk) hűen lapos Galois-kiterjesztéseire is sikerült igazolni a második szimmetria objektum létezését, azonban (igen zavaró módon) az általánosság ezen szintjén nem sikerült bizonyítani a komodulus kategóriák ekvivalenciáját.

Claudia Meninivel együttműködve a kérdést egy általánosabb, kategória elméleti megfogalmazásban vizsgáltuk. Megfelelő (a korábbiaktól kissé különböző hű lapossági) feltevések mellett koható kogyűrűk helyett komonád funktorokat konstruáltunk, melyeket nem feltétlenül kogyűrűk indukálnak, azonban komodulus kategóriáik ekvivalenciáját igazolni tudtuk.

Ez arra utalhat, hogy nem kommutatív alapgyűrűk esetén a szimmetria nem feltétlenül egy kogyűrűvel adott, leírhatja egy általánosabb komonád is. Ez az észrevétel további kutatások sorát indította el (melyeken Viola Bruni dolgozik Ferrarában készülő PhD értekezéseként, C. Menini témavezetésével).
(**Referencia:** G. Böhm and C. Menini, *Pre-torsors and Galois comodules over mixed distributive laws*, Preprint http://arxiv.org/abs/0806.1212, Appl. Categor. Struct., in press. doi:10.1007/ s10485-008-9185-9)

**Galois-leszármazás.**

Egy $B \subseteq A$ algebra kiterjesztéshez tartozó leszármaztatott adatokat (angol szóval descent data) egy alkalmas $A$ fölötti Galois-kogyűrű komodulusaiként is leírhatjuk. Ha a $B \subseteq A$ kiterjesztés hűen lapos, ezek kategóriája ekvivalens a $B$-modulusok kategóriájával. Általánosabban, a Galois-leszármazás kérdésköre egy (Galois-) kogyűrű komodulus kategóriájának vizsgálatával foglalkozik, jellemzően egy gyűrű modulus kategóriájával való összehasonlításával. (Gyenge struktúra tételek egy hű és teli funktor létezését igazolják közöttük, erős struktúra tételek pedig ekvivalenciájukat.) Klasszikus példa egy Hopf–Galois-kiterjesztés esetén a relatív Hopf-modulusok kategóriája és az invariáns részalgebra modulus kategóriája közötti ekvivalencia.

Ha egy kogyűrű végesen generált projektív az alapgyűrűje fölött, akkor komodulusainak kategóriája izomorf a duális gyűrű modulus kategóriájával. Ha tehát egy ilyen kogyűrű komodulus kategóriája ekvivalens egy gyűrű modulus kategóriájával, akkor az ekvivalencia mögött egy szigorú Morita-összefüggés áll. Ez a Morita-összefüggés azonban akkor is létezhet, ha a kogyűrű nem végesen generált projektív. Joost Vercruyssevel együttműködve arra voltunk kíváncsiak, mi tudható meg a komodulus kategóriáról ezen Morita-összefüggések vizsgálatából.

T. Kato és K. Ohtake tétele szerint bármely (nem feltétlenül szigorú) Morita-összefüggés ekvivalenciát indukál a szereplő gyűrűk modulus kategóriáinak bizonyos, jól jellemezhető részkategóriái között. Ezek egy nem egységelemes gyűrű ún. szilárd (angolul firm) modulusainak kategóriái. Ezt az eredményt alkalmaztuk kogyűrűk komodulusaihoz rendelt Morita-összefüggésekre, hogy így a kogyűrű komodulus kategóriáját (azaz az általánosított leszármaztatott adatok kategóriáját) egy szilárd gyűrű szilárd modulusainak kategóriájával hasonlíthassuk össze. Eredményképpen az irodalomban fellelhető, komodulusokra vonatkozó gyenge és erős struktúra tételek általánosításait bizonyítottuk, túllépve elsősorban azon az eseten, mikor akár a kogyűrű, akár a tételben szereplő komodulusa végesen generált projektív modulus.

(**Referencia**: G. Böhm and J. Vercruysse, *Morita theory of comodules*, Comm. Algebra 37 (2009), no. 9, 3207-3247.)

**Kontramodulusok vizsgálata.**

Már S. Eilenberg és J.C. Moore rámutattak, hogy míg egy algebra által (tenzor szorzás révén) indukált monád és a jobb adjungált komonád Eilenberg–Moore-kategóriái izomorfak, egy koalgebra (vagy kogyűrű) által indukált tenzor komonád és a jobb adjungált monád Eilenberg–Moore-kategóriái különbözőek lehetnek. Noha ezek a (kogyűrűk komodulus, illetve kontramodulus kategóriájának nevezett) kategóriák teljesen szimmetrikus módon adódnak, az irodalomban dominál a komodulusok vizsgálata.

Tomasz Brzezińskivel és Robert Wisbauerrel együttműködve a kontramodulusok elméletét tanulmányoztuk. Míg az absztrakt kategóriaelméleti megfogalmazásban egy duális monád-komonád pár leírása teljesen szimmetrikus, érdekes volt végigkövetni, hogy egy gyűrű bimodulusainak konkrét kategóriájára alkalmazva milyen különböző tulajdonságokra vezetnek az analóg absztrakt vonások. Főbb eredményeink egyikeként szükséges és elégséges feltételeket fogalmaztunk meg arra vonatkozóan, hogy egy kogyűrű kontramodulusainak kategóriája és egy (akár másik) kogyűrű komodulusainak kategóriája ekvivalensek. Az egyik kogyűrűt triviálisnak választva ebből arra vonatkozó feltételeket nyerünk, hogy a másik kogyűrű komodulusainak illetve kontramodulusainak kategóriája egy gyűrű modulus kategóriájával ekvivalens (ún. leszármazás probléma). A komodulus kategória esetében ez már ismert volt, a kontramodulusok esetében azonban nem; tanulságos volt a két eset hasonlóságainak illetve különbségeinek összevetése. A cikk egy másik fontos eredménye, hogy disztributív szabályok által indukált kogyűrűk kontramodulusainak analízisével Hopf-algebrák újabb ekvivalens jellemzésére jutottunk.
(**Referencia**: G. Böhm, T. Brzeziński and R. Wisbauer, *Monads and comonads on module categories*, J. Algebra 322 (2009) 1719-1747.)

**A monádok gyenge elmélete.**

Köztudott, hogy számos, a Hopf-algebrákhoz kapcsolódó, illetve a Hopf–Galois-elméletben előforduló konstrukció beilleszthető a monádok ún. formális elméletébe, azaz 2-kategóriák monádjainak S. Lack és R. Street nevéhez fűződő absztrakt tárgyalásába. Például, a bialgebrákkal vett kereszt szorzat példa monádok koszorú-szorzatára (angol szóval wreath product). Másik példaként az ún. relatív Hopf-modulusok értelmezhetőek mint egy monád Eilenberg–Moore-kategóriájára felhúzott (angolul lifted) komonád koalgebrái.

Szerteágazó motivációk alapján, évekkel ezelőtt, Florian Nillel és Szlachányi Kornéllal együttműködve, általánosítottuk a Hopf-algebrákat. A (ko)algebrai (ko)egységre vonatkozó axiómákat gyengítve bevezettük az ún. gyenge Hopf-algebrákat. Az elmúlt mintegy tíz évben világszerte több kutatócsoportnak a legtöbb Hopf-algebrai konstrukciót sikerült általánosítania gyenge Hopf-algebrákra. J. Fernandez Vilaboa és társszerzői cikksorozatban fejlesztették ki gyenge bialgebrákkal vett kereszt szorzatot. S. Caenepeel és E. De Groot kidolgozták a gyenge Hopf-algebrák Galois-elméletét, melyhez használták a relatív Hopf-modulusok fogalmát. Mindezek jól alkalmazható és működő konstrukciók, azonban *nem* illeszkednek a monádok formális elméletébe.

A fenti motivációk alapján azt a kérdést tűztem magam elé, hogyan terjeszthető ki a monádok formális elmélete olyan módon, hogy az új, általánosabb elmélet magába foglalja a gyenge Hopf-algebrákhoz kapcsolódó konstrukciókat is. Ez a munka elsősorban (magasabb dimenziós) kategória elméleti módszerek alkalmazását igényelte, értelemszerűen kombinálva (Hopf-) algebrai eredmények felhasználásával.

Egy tetszőleges $\mathcal{K}$ 2-kategória esetén olyan 2-kategóriát vezettem be, mely tartalmazza a $\mathcal{K}$-beli monádok Lack–Street-féle 2-kategóriáját. A 0-cellák továbbra is monádok $\mathcal{K}$-ban.

Az általánosítás abban áll, hogy az 1-cellák és a monádok egységei közötti kompatibilitási feltételt egy, a 2-cellákra vonatkozó további követelménnyel helyettesítettem. Általánosságban fogalmazva, ez azt eredményezi, hogy bizonyos identitás 2-cellák helyett idempotens 2-cellák lépnek fel. Mindazon esetekben amikor ezen idempotens $X \Rightarrow X$ 2-cella felhasad (angol szóval split), a megfelelő visszahúzás (retract) veszi át $X$ szerepét. Például, egy monád a monádok ezen új 2-kategóriájában nem határoz meg egy monádot a koszorú-szorzás révén. Azonban, a naiv koszorú-szorzat rendelkezik egy kanonikus idempotenssel. Ha ez felhasad, a megfelelő visszahúzás már monád. Igazoltam, hogy a gyenge kereszt szorzat pontosan így, visszahúzásként áll elő. Olyan 2-kategóriák esetén, melyekben létezik a monádok Eilenberg–Moore-objektuma, vizsgálható az 1- és 2-cellák „gyenge" felhúzása Eilenberg–Moore-objektumokra (aminek definíciójához bizonyos 1-cellák szokásos egyenlőségét egy felhasadó idempotens létezésével helyettesítettem). Bebizonyítottam, hogy egy 2-kategóriában, melyben léteznek Eilenberg–Moore-objektumok és minden idempotens 2-cella felhasad, bármely gyenge felhúzás előáll a monádok új 2-kategóriájának valamely cellájából egy alkalmas 2-funktor révén. Megmutattam, hogy a gyenge Hopf–Galois-elméletben kulcsszerepet játszó komonád előáll mint gyenge felhúzás.
(**Referencia**: G. Böhm, *The weak theory of monads*, Adv. Math. 225 (2010), 1-32.)

**Gyenge bimonádok.**

A bialgebrák jellemezhetők, mint pontosan azok a $B$ algebrák egy $k$ kommutatív gyűrű fölött (vagy általánosabban, egy fonott monoidális kategóriában), melyek modulusainak kategóriája (azaz az indukált tenzor-monád Eilenberg–Moore-kategóriája) monoidális úgy, hogy a felejtő funktor a $k$-modulusok kategóriájába (vagy általánosabban, az alap kategóriába) szigorúan monoidális. Ezen a leíráson alapszik a bialgebrák Moerdijk által javasolt általánosítása nem feltétlenül fonott monoidális kategóriákra, melyet ő eredetileg „Hopf-monádnak" hívott, de amelyre azóta inkább a kifejezőbb „bimonád" név használatos.

Természetesen felvetődik a kérdés, mi a bialgebrák két különböző irányú általánosítását – a bimonádokat és a gyenge bialgebrákat – egyaránt általánosító fogalom. E kérdés megválaszolását tűzte ki céljául Steve Lackkal Ross Streettel közös munkánk. Ebben az Eilenberg–Moore-kategória monoidális struktúrájára megfogalmazott követelmények révén definiáltuk a „gyenge bimonádokat" monoidális kategóriákon. Cauchy-teljes alap monoidális kategória esetén igazoltuk definíciónk ekvivalenciáját néhány egyszerű axiómával. Megmutattuk, hogy gyenge bimonádok Eilenberg–Moore-kategóriájának monoidális struktúrájára gyenge felhúzással adódik. Igazoltuk, hogy egy adott Cauchy-teljes monoidális kategória gyenge bimonádjainak kategóriája ekvivalens egy olyan kategóriával, melynek objektumai egy $R$ szeparábilis Frobenius-monoidból és egy, az $R$-bimodulusok kategóriáján értelmezett bimonádból állnak. Ez általánosítja a gyenge bialgebrák és a bialgebroidok közötti (ismert) kapcsolatot. Igazoltuk, hogy bármely Cauchy-teljes fonott monoidális kategóriában minden gyenge bialgebra indukál egy gyenge bimonádot. Jellemeztük azon gyenge bimonádokat amelyek így állnak elő. A Bruguières–Lack–Virelizier-féle jobb illetve bal Hopf-monádok gyenge megfelelőiként definiáltuk a jobb illetve bal gyenge Hopf-monádokat. Igazoltuk, hogy egy Cauchy-teljes fonott monoidális kategóriában egy gyenge bialgebra pontosan akkor indukál jobb gyenge Hopf-monádot (a jobbról való tenzor szorzás révén) ha gyenge Hopf-algebra és pontosan akkor indukál bal Hopf-monádot is ha antipódja bijektív.
(**Referencia**: G. Böhm, S. Lack and R. Street, *Weak bimonads and weak Hopf monads*, J. Algebra 328 (2011), 1-30.)

**Gyenge disztributív szabályok 2-kategóriáiról.**

Egy vegyes disztributív szabály valamely $\mathcal{K}$ 2-kategóriában áll egy $t$ monádból és egy $c$ komonádból ugyanazon $A$ objektumon valamint egy $\lambda : tc \to ct$ 2-cellából amely kompatibilis a monád és a komonád struktúrákkal. Egy vegyes disztributív szabály ekvivalens módon jellemezhető mint egy $((A,t),(c,\lambda))$ komonád a $\mathcal{K}$-beli monádok $\mathsf{Mnd}(\mathcal{K})$-val jelölt 2-kategóriájában, avagy egy $((A,c),(t,\lambda))$ monád a $\mathcal{K}$-beli komonádok $\mathsf{Cmd}(\mathcal{K})$-val jelölt 2-kategóriájában. Így nyilvánvaló, hogy a $\mathcal{K}$-beli vegyes disztributív szabályok 2-kategóriát alkotnak. Jelölje ezt $\mathsf{Mdl}(\mathcal{K})$.

A disztributív szabályok kulcs szerepet játszanak a (ko)monádok felhúzásában. Ha $\mathcal{K}$-ban létezik az $(A,t)$ monádok $A^t$-vel jelölt Eilenberg–Moore-objektuma, akkor van egy hű és teli 2-funktor $\mathsf{Mnd}(\mathcal{K})$-ból a $\mathcal{K}^2$ nyíl 2-kategóriába, ami az $(A,t)$ monádot a $A^t \to A$ felejtő nyílba viszi. Hasonlóan, ha a $\mathcal{K}$-beli komonádoknak van Eilenberg–Moore-objektuma, akkor van egy hű és teli 2-funktor $\mathsf{Cmd}(\mathcal{K}) \to \mathcal{K}^2$. Ezekből előáll egy hű és teli 2-funktor

$$\mathsf{Mdl}(\mathcal{K}) \cong \mathsf{Mnd}(\mathsf{Cmd}(\mathcal{K})) \to \mathsf{Mnd}(\mathcal{K}^2) \to (\mathcal{K}^2)^2 \cong \mathcal{K}^{2\times 2}.$$

A vegyes disztributív szabályok „gyenge” általánosítását S. Caenepeel és E. De Groot vezették be (gyenge bialgebrákkal kapcsolatos motivációk alapján). Az általánosítás abban áll, hogy a (ko)monád (ko)egységével kapcsolatos axiómák gyengíttetnek.

Steve Lackkal és Ross Streettel közös munkánk célja az volt, hogy a disztributív szabályokra vonatkozó fenti klasszikus eredményeket kiterjesszük gyenge disztributív szabályokra. (Közös munkánk kiindulópontja publikálatlan [G. Böhm, *The 2-category of weak entwining structures*, http://arxiv.org/ abs/0902.4197] preprintem volt.) A probléma nehézsége abban állt, hogy a klasszikus esettel szemben a gyenge disztributív szabályok nem írhatók le mint valamely 2-kategória (ko)monádjai. Ehelyett felhasználhattuk azt az észrevételt, hogy egy gyenge vegyes disztributív szabály leírható mint egy pár, melynek egyik tagja egy komonád egy, a $\mathcal{K}$-beli monádok 2-kategóriáját általánosító $\mathsf{Mnd}^\iota(\mathcal{K})$-val jelölt 2-kategóriában, másik tagja pedig egy monád egy, a $\mathcal{K}$-beli komonádok 2-kategóriáját általánosító $\mathsf{Cmd}^\pi(\mathcal{K})$-val jelölt 2-kategóriában (A (ko)monádok ezen általánosított 2-kategóriáit a [G. Böhm, *The weak theory of monads*, Adv. Math. 225 (2010), 1-32.] cikkemben vezettem be.) Ezen megfigyelés segítségével definiálható a gyenge vegyes disztributív szabályok 2-kategóriája mint az $\mathsf{Mnd}^\iota(\mathcal{K})$-beli komonádok 2-kategóriájának és a $\mathsf{Cmd}^\pi(\mathcal{K})$-beli monádok 2-kategóriájának alkalmas értelemben vett metszete. Sem $\mathsf{Mnd}^\iota(\mathcal{K})$ sem $\mathsf{Cmd}^\pi(\mathcal{K})$ nem ágyazható be $\mathcal{K}^2$-be, hiszen nem szigorú (csak gyenge) értelemben vett felhúzásokkal kapcsolatosak. Igazoltuk azonban, hogy (talán valamelyest meglepő módon) a gyenge vegyes disztributív szabályok 2-kategóriája beágyazható $\mathcal{K}^{2\times 2}$-be. Jellemeztük továbbá ezen beágyazás képét.
(**Referencia**: G. Böhm, S. Lack and R. Street, *On the 2-categories of weak distributive laws*, Preprint: http://arxiv.org/abs/1009.3454, Comm. Algebra (special volume dedicated to Mia Cohen), in press.)

**Gyenge disztributív szabályok indukálta faktorizációs rendszerek.**

A régóta tanulmányozott (ortogonális) faktorizációs rendszerek mostanában ismét az érdeklődés homlokterébe kerültek a Quillen-féle modell kategóriákban játszott szerepük miatt. Általánosságban, egy kis kategória faktorizációs rendszerei alatt olyan $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{C} \hookleftarrow \mathcal{M}$ részkategóriákat értünk, ahol minden $\mathcal{C}$-beli $f$ nyílnak van egy (nem szükségképpen egyértelmű) $f = me$ faktorizációja, ahol $e$ $\mathcal{E}$-beli $m$ pedig $\mathcal{M}$-beli nyíl. A különböző típusú faktorizációs rendszerek axiómái további tulajdonságokat (pl. egyértelműség, alkalmas értelemben vett ortogonalitás) írnak elő. M. Korostenski és W. Tholen az ún. ortogonális faktorizációs rendszereket a $(-)^2 : \mathsf{Cat} \to \mathsf{Cat}$ 2-monád pszeudo-algebráiként írták le. M.

Grandis rámutatott, hogy a szigorú (azaz egyértelmű) faktorizációs rendszerek az ortogonálisak aleseteinek tekinthetők, abban az értelemben, hogy minden szigorú faktorizációs rendszer része pontosan egy ortogonálisnak. R.D. Rosebrugh és R.J. Wood bebizonyították, hogy pontosan azok az ortogonális faktorizációs rendszerek tartalmaznak egy szigorút, melyek a Korostenski–Tholen-féle leírásban a $(-)^2 : \mathsf{Cat} \to \mathsf{Cat}$ 2-monád szigorú algebráinak felelnek meg. Ugyanők igazolták azt is, hogy a szigorú faktorizációs rendszerek ekvivalens módon megadhatók mint egy disztributív szabály két monád között a $\mathsf{Span}$ bikategóriában (annak egy ekvivalens, $\mathsf{SetMat}$-ként jelölt mátrix realizációját használva).

Az én munkám célja az volt, hogy felderítsem, mely faktorizációs rendszerek felelnek meg $\mathsf{SetMat}$-beli *gyenge* disztributív szabályoknak. Egy szigorú értelemben vett disztributív szabály szigorú faktorizációs rendszert határoz meg, azaz a $\mathsf{SetMat}$-beli

$$\mathcal{E}\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{C}\mathcal{C} \xrightarrow{\circ} \mathcal{C}$$

2-cella inverzét. Ezzel szemben megmutattam, hogy egy gyenge disztributív szabály ennek a 2-cellának csak egy szelését határozza meg, amely rendelkezik az általam $\mathcal{E}$- illetve $\mathcal{M}$-linearitásnak nevezett tulajdonsággal. Egy ilyen tulajdonságú szelést ezért *bilineáris faktorizációs rendszernek* neveztem el. Bebizonyítottam, hogy az alábbi kategóriák között léteznek adjunkciók, melyek egysége izomorfizmus. Először is, a $\mathsf{SetMat}$-beli gyenge disztributív szabályok kategóriája és a bilineáris faktorizációs rendszerek kategóriája között. Másodszor, a bilineáris faktorizációs rendszerek kategóriája és a $(-)^2 : \mathsf{Cat} \to \mathsf{Cat}$ 2-monád szigorúan asszociatív (de nem szigorúan egység elemes) pszeudo-algebráinak kategóriája között. Ez azt jelenti, hogy minden gyenge disztributív szabály $\mathsf{SetMat}$-ban meghatároz egy bilineáris faktorizációs rendszert; és minden bilineáris faktorizációs rendszer előáll ilyen módon, noha nem egyértelműen. M. Korostenski és W. Tholen fent idézett eredményét is felhasználva az is következik, hogy minden bilineáris faktorizációs rendszer része egy ortogonálisnak és pontosan jellemezhetőek azon ortogonális faktorizációs rendszerek melyek tartalmaznak egy bilineárisat.

(**Referencia**: G. Böhm, *Factorization systems induced by weak distributive laws*, Preprint: http:// arxiv.org/abs/1009.0732, Appl. Categor. Struct., in press.)